

Занятие 10

1. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются. Докажите, что сумма длин AC и BD (1) больше половины периметра; (2) меньше периметра. (Периметр многоугольника — сумма длин его сторон.) Иными словами, построив дороги AC и BD вместо кольцевой дороги $ABCD$, мы выиграем по длине, но менее чем вдвое.

2. Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 27, то само число делится на 27?

3. В строку выписано 1000 целых чисел. Докажите, что всегда найдутся несколько идущих подряд чисел (возможно, одно), сумма которых делится на 1000.

4. Число x — натуральное. Из неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x > 9$, $x > 5$ два неверных и три верных. Чему равно число x ?

5. На кольцевой дороге стоят несколько бензоколонок. Всего бензина хватит на один круг. Докажите, что машина с пустым баком может проехать полный круг, заправляясь по пути, если правильно выберет начальную колонку (полного бака машины хватит, чтобы проехать целый круг).

6. У борта прямоугольного бильярда стоит шар. Постройте направление, по которому его надо толкнуть, чтобы он, отразившись от трёх бортов, попал в начальную точку. (Угол падения равен углу отражения; попадание в лузу по пути следования шара запрещается!)

7. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

8. Когда быстрее темнеет после захода солнца — 22 июня (в летнее солнцестояние) или 22 декабря (в зимнее солнцестояние)? Как зависит ответ от места на Земле, в котором производятся измерения?

Занятие 10

1. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются. Докажите, что сумма длин AC и BD (1) больше половины периметра; (2) меньше периметра. (Периметр многоугольника — сумма длин его сторон.) Иными словами, построив дороги AC и BD вместо кольцевой дороги $ABCD$, мы выиграем по длине, но менее чем вдвое.

2. Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 27, то само число делится на 27?

3. В строку выписано 1000 целых чисел. Докажите, что всегда найдутся несколько идущих подряд чисел (возможно, одно), сумма которых делится на 1000.

4. Число x — натуральное. Из неравенств $2x > 70$, $x < 100$, $3x > 25$, $x > 9$, $x > 5$ два неверных и три верных. Чему равно число x ?

5. На кольцевой дороге стоят несколько бензоколонок. Всего бензина хватит на один круг. Докажите, что машина с пустым баком может проехать полный круг, заправляясь по пути, если правильно выберет начальную колонку (полного бака машины хватит, чтобы проехать целый круг).

6. У борта прямоугольного бильярда стоит шар. Постройте направление, по которому его надо толкнуть, чтобы он, отразившись от трёх бортов, попал в начальную точку. (Угол падения равен углу отражения; попадание в лузу по пути следования шара запрещается!)

7. 100 фишек поставлены в ряд. Разрешается менять местами любые две фишки, стоящие через одну. Можно ли таким способом переставить фишки в обратном порядке?

8. Когда быстрее темнеет после захода солнца — 22 июня (в летнее солнцестояние) или 22 декабря (в зимнее солнцестояние)? Как зависит ответ от места на Земле, в котором производятся измерения?